حل تمرين معادلات تفاضلية

أستنتج الحل العام للمعادلة التفاضلية : ومنه حل المعادلة

(1) $y' + 2xy = 4x$ 20 علامة

$y' + 2xy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = -2x\,dx$

$\ln|y| = -2\left(\frac{x^2}{2}\right) + \ln(c) \Rightarrow \ln|y| - \ln|c| = -x^2$

$\ln\left(\frac{y}{c}\right) = -x^2 \Rightarrow \frac{y}{c} = e^{-x^2} \Rightarrow y = c \cdot e^{-x^2}$ (2)

$y' = c' \cdot e^{-x^2} - 2x \cdot e^{-x^2} \cdot c$ (3)

5 علامة نعوض (1) و (2) و (3) في المعادلة

$c' \cdot e^{-x^2} - 2x \cdot e^{-x^2} \cdot c + 2x \cdot c \cdot e^{-x^2} = 4x$

$c' \cdot e^{-x^2} = 4x \Rightarrow c'(x) = 4x \cdot e^{x^2} dx \Rightarrow$ طريقة

$x^2 = t \Rightarrow 2x\,dx = dt$ نعوض

$c(x) = 2e^{x^2} + c_1$

$y = (2e^{x^2} + c_1) \cdot e^{-x^2}$

(2) $(3y e^{3x} - 2x)\,dx + e^{3x}\,dy = 0$ 20 علامة

$M(x,y)$ $N(x,y)$

5 علامة

$\frac{\partial M}{\partial y} = 3e^{3x}$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 3e^{3x}$ شرط محقق

$P(x,y) = \int M(x,y)\,dx + q(y) = \int (3y e^{3x} - 2x)\,dx + q(y)$

$= \frac{3y}{3} e^{3x} - x^2 + q(y)$ 5 علامة

$F = y e^{3x} - x^2 + q(y)$ نشتق

$\frac{dF}{dy} = e^{3x} + q'(y) = N(x,y) = e^{3x} + q'(y) = e^{3x}$

$q'(y) = 0 \rightarrow$ نكامل $q(y) = c$ 5 علامة

$F = y e^{3x} - x^2 + c$

السؤال الثاني : أوجد حل المعادلة 20 درجة

$$y' = \frac{x+y}{x-y}$$

نقسم البسط والمقام على $x \neq 0$ (لماذا؟) 5 درجات

$$= \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$$

نفرض $z = \frac{y}{x}$ نشتق $y = zx + z$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+z}{1-z}$$

$$\Rightarrow zx + z = \frac{1+z}{1-z}$$ 5 درجات

$$zx = \frac{1+z}{1-z} - z \Rightarrow zx = \frac{1+z^2}{1-z} \Rightarrow \frac{1-z}{1+z^2}dz = \frac{dx}{x}$$

5 درجات

نكامل $\ln(x) = \left(\frac{1}{1+z^2} - \frac{2z}{2(1+z^2)}\right)dz \Rightarrow \ln(x) = \arctan z - \frac{1}{2}\ln(1+z^2) + c$ 5 درجات

السؤال الثاني : أوجد حل المعادلة 20 درجة

$$e^{x+y}dy = e^{-2x}dx$$ 5 درجات

$$e^{y}\cdot e^{y}dy = e^{-2x}dx \Rightarrow e^{y}dy = e^{-3x}dx$$ مثال

$$e^{y} = -\frac{1}{3}e^{-3x} + c \Rightarrow y = \ln\left(-\frac{1}{3}e^{-3x} + c\right)$$ 5 درجات

السؤال الرابع : أوجد حل المعادلة التالية

$$(x^2+1)(y^2-1)dx = -2xydy$$ 5 درجات

نضع $x(y^2-1) \neq 0$

$$\frac{(x^2+1)}{x}dx = \frac{-2y}{y^2-1}dy \Rightarrow$$ 5 درجات مثال

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)dx = -\frac{2y}{y^2-1}dy \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \ln|x| = -\ln|y^2-1| + c$$

$$e^{\frac{x^2}{2}} + x = y^2 - 1 + c$$ 5 درجات

$$y = \sqrt{e^{\frac{x^2}{2}} + x + 1 + c}$$ 5 درجات